E.I.T.P.E. COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h) 1982

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé O,x,y,z.

Soit $(D_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ la famille de droites d'équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \alpha z + 2\alpha\varphi(\alpha) - f(\alpha) \\ y = f(\alpha)z + \alpha[\varphi(\alpha)]^2 \end{cases}$$

où f et φ sont deux fonctions réelles de α, continûment dérivables. On note $M_{\alpha, z}$ le point de coordonnées :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \alpha z + 2\alpha\varphi(\alpha) - f(\alpha) \\ y = f(\alpha)z + \alpha[\varphi(\alpha)]^2 \\ z = z \end{cases}$$

et Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ décrite par $M_{\alpha,z}$ lorsque $(\alpha, z) \in \mathbb{R}^2$. On a donc :

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha$$

PREMIERE PARTIE

I.1 - a) Montrer qu'il existe deux fonctions vectorielles $\vec{g}_1$ et $\vec{g}_2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, continûment dérivables, telles que :

$$\overrightarrow{OM}_{\alpha,z} = \vec{g}_1(\alpha) + z\,\vec{g}_2(\alpha)$$

b) Montrer que les trois vecteurs $\vec{g}_1'(\alpha)$, $\vec{g}_2'(\alpha)$, $\vec{g}_2(\alpha)$ ($\vec{g}_1'$ et $\vec{g}_2'$ étant les dérivées par rapport à α de $\vec{g}_1$ et $\vec{g}_2$) sont liés si et seulement si l'une ou l'autre des deux relations suivantes est vérifiée :

(3) $\quad f'(\alpha) = \varphi(\alpha)$

(4) $\quad f'(\alpha) = \varphi(\alpha) + 2\alpha\,\varphi'(\alpha)$

Dans toute la suite du problème, nous supposerons que l'une (respectivement l'autre) de ces relations est constamment vérifiée.

I.2 - a) Exprimer, en fonction de $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ et de leurs dérivées, les vecteurs définissant, en général, le plan tangent à Σ en $M_{\alpha,z}$.

b) Montrer que pour tout réel α, le plan tangent à Σ est défini par les précédents vecteurs en tout point de D_α sauf un, noté N_α, et appelé point caractéristique de D_α.

c) Montrer que, indépendamment de la relation (3) ou (4) vérifiée, l'ensemble des points $(N_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ décrit un arc paramétré Γ continu de $\mathbb{R}^3$ inclus dans Σ (dont on ne demande pas de représentation explicite). Quelle est la tangente à Γ en N_α ? Quel est le plan osculateur à Γ en N_α ?

I.3 - a) Montrer que pour tout α réel, le plan tangent à Σ est le même en tous les points de D_α autres que N_α, et qu'il contient D_α. Nous noterons ce plan Π_α.

b) En déduire une équation cartésienne de Π_α dans le repère Oxyz, indépendante de la relation (3) ou (4) vérifiée, en fonction de α, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$.

DEUXIEME PARTIE

II.1 - On suppose que φ est connue et f inconnue, mais vérifiant la relation (4).

a) Montrer qu'il existe une famille infinie de surfaces $(\Sigma_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ vérifiant les propriétés précédentes. Donner une représentation

.../...

paramétrique des arcs Γ_λ associés, en fonction de α, $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$.

b) Montrer que tous les arcs Γ_λ sont inclus dans une même surface S admettant une représentation polynômiale du deuxième degré en x, y et z.

II. 2 - On suppose maintenant que φ est connue et f inconnue, mais vérifiant la relation (3).

a) A quelle équation différentielle, notée (5), doit obéir la fonction $f(\alpha)$ pour que la surface Σ contienne la courbe d'équations :

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$$

b) Trouver toutes les fonctions $f(\alpha)$ vérifiant l'équation (5) en opérant d'abord le changement de variable $\alpha = \beta^2$ (on pourra, alors poser $f(\alpha) = h(\beta)$), puis le changement de fonction : $\frac{dh}{d\beta} = t(\beta)$ (On se limitera à l'étude du cas où α est positif). Vérifier, en particulier, que l'on trouve une famille de fonctions $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ si t ne dépend pas de β, et une fonction $F(\alpha)$ si t dépend de β.

c) Si t est indépendant de β, montrer que les arcs $(\Gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ associés aux fonctions $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sont réduits à des points. Quel est l'arc décrit par ces points quand t décrit $\mathbb{R}$?

d) Si t dépend de β, donner une représentation paramétrique de l'arc Γ associé à F, en prenant comme paramètre :

$$u = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{4}}$$

Etudier et tracer la courbe représentative de l'arc Γ associé à F dans le repère Oxyz (on montrera, en particulier, que Γ admet une droite et une parabole asymptotes).

TROISIEME PARTIE

On rappelle que l'une (respectivement l'autre) des relations (3) ou (4) est toujours constamment vérifiée.

III. 1 - a) Montrer que l'intersection de Σ avec la surface d'équation $zx + y = 0$ est composée d'une courbe plane (Δ) et d'une courbe (C), dont on donnera des représentations paramétriques.

b) Donner une relation entre f et φ pour que (C) soit contenue dans l'un des axes de coordonnées. (Cette relation, notée (6) est supposée vérifiée jusqu'à la fin du problème). Déterminer alors les fonctions $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ en fonction du paramètre μ. Quelle est la nature de Σ ?

III. 2 - a) Calculer les coordonnées du point $P_\alpha(\mu)$, projection orthogonale de l'origine O sur $D_\alpha(\mu)$.

b) On note B_μ l'ensemble des points $P_\alpha(\mu)$ obtenus lorsque α décrit $\mathbb{R}$. Montrer que B_μ est une courbe plane dont on donnera une équation cartésienne dans un repère orthonormé de son plan.

c) En déduire une équation, dans le repère Oxyz, de la surface $\mathcal{B}$ décrite par les points $P_\alpha(\mu)$ lorsque le couple (α,μ) décrit $\mathbb{R}^2$. Etudier et tracer la courbe intersection de $\mathcal{B}$ et d'un plan d'équation $z = -a$ (avec $a>0$).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail